ערכים ווקטורים עצמיים

# הגדרה

יהי אופרטור(וV מ"ו מעל ). סקלר נקרא ערך עצמי של T אם קיים כך ש.

# הגדרה

, נקרא ערך עצמי של A אם קיים כך ש.

# דוגמאות

1. () , ⇦ ע"ע(ערך עצמי) של אופרטור זהות הוא
2. ו, ⇦ 0 הוא ע"ע של T ⬄

# הגדרה

אופרטור. אם קיים כך ש

# הגדרה

יהי אופרטור. ל נגדיר תת מרחב עצמי

## תרגיל

1. תת מרחב
2. אם ורק אם הוא ע"ע של T.

## דוגמה

ו בסיס. ,

⬄

*הוא ע"ע של T ⬄ הוא ע"ע של   
 הוא וקטור עצמי(עם ע"ע) של T ⬄ הוא ו"ע של A(עם ע"ע)*

# הגדרה

יהי פולינום המוגדר ע"י נקרא פולינום אופייני של A.

## דוגמה

# באופן כללי

שאר האיברים כתובים בעזרת המינורים.

פולינום אופייני של אופרטור

, בסיס, ,

## הערה

אם בסיס אחר וP מטריצת מעבר אזי   
⇦ לא תלוי בבחירה של בסיס

# משפט

התנאים הבאים הם שקולים:

1. הוא ע"ע של
2. מטריצה היא סינגולרית ()
3. הוא שורש של פולינום אופייני (

## גירסת האופרטורים

1. הוא ע"ע של
2. אופרטור T אינו הפיך
3. הוא שורש של

## הוכחה

ע"ע של A: קיים , ⬄ ⬄ ע"ע אם ורק אם למערכת קיים פתרון לא טריוויאלי ⬄ סינגולרית.

*סינגולרית ⬄*

# משפט

מטריצה ניתנת ללכסון אם ורק אם קיימים n ווקטורים עצמיים בת"ל (ווקטורים האלה נקראים בסיס עצמיים)

## הוכחה

נניח ווקטורים בת"ל שמקיימים , (כלומר לA יש n ווקטורים עצמיים בת"ל).   
 ⬄ ( קיימת כי בת"ל). ⬄

הערה – ההוכחה עובדת גם מהסוף להתחלה.

# משפט

ניתן ללכסון אם ורק אם קיימים n ווקטורים עצמיים בת"ל (ווקטורים האלה נקראים בסיס עצמיים)

## הוכחה

תרגיל!

# דוגמאות

1. ⇦ 0 הוא ערך עצמי יחיד. נחשב את . מרחב הפתרונות(שהוא מרחב עצמי עם ע"ע 0) הוא ( ⇦ ) וזה אומר שלא קיימים שני וקטורים בת"ל עצמיים(עם ע"ע 0) ⇦ A לא ניתנת ללכסון

**לא כל מטריצה(מעל כל שדה!) ניתנת ללכסון**

# משפט

יהי ו כל הע"ע השונים(כלומר כל השורשים השונים של ). נסמן ב .  
A ניתנת ללכסון אם ורק אם

## דוגמה

1. , , ⇦ ⇦ A לא ניתנת ללכסון
2. , ע"ע , ⇦ ⇦ – ניתנת ללכסון.

**ואם** ו בסיסים למרחבים עצמיים עזי ביחד זה בסיס עצמי לA.

נשאלת השאלה – איך מבטיחים שאיחוד של קבוצות בת"ל יותר קבוצה בת"ל? התשובה היא שיש להם ע"ע שונים:

# משפט

יהיו ו ווקטורים עצמיים עם ע"ע שונים()

## הוכחה

נניח שמתקיים ⇦ *⇦ ⇦ ⇦ לא בת"ל*